

THÈSE DE DOCTORAT

Bifurcations dans des systèmes avec bruit: Applications aux Sciences Sociales et à la Physique

Présentée en vue de l'obtention du grade de docteur en **Physique** d'*Université Côte d'Azur*
et de **Doctor en Ingeniería de Sistemas Complejos** d'*Universidad Adolfo Ibañez*

Luis Fernando Mora Gómez

Institut de Physique de Nice & Facultad de Ingeniería y Ciencias

Giorgio Sonnino
Enrique Tirapegui
Thomas Frisch
Aldo Mascareño
Pierre Couillet
Sergio Rica

Université Libre de Bruxelles
Universidad de Chile
Université Côte d'Azur
Universidad Adolfo Ibañez
Université Côte d'Azur
Universidad Adolfo Ibañez

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de Thèse
Directeur de Thèse

Sotenu le :

14 Décembre 2018

DOCTORAL THESIS

Bifurcations and Noisy Systems: Social and Physical Applications

Presented in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in the field of **Physics** of *Université Côte d'Azur* and of **Doctor en Ingeniería de Sistemas Complejos** of *Universidad Adolfo Ibáñez*

Luis Fernando Mora Gómez

Institut de Physique de Nice & Facultad de Ingeniería y Ciencias

Giorgio Sonnino
Enrique Tirapegui
Thomas Frisch
Aldo Mascareño
Pierre Coulet
Sergio Rica

Université Libre de Bruxelles
Universidad de Chile
Université Côte d'Azur
Universidad Adolfo Ibáñez
Université Côte d'Azur
Universidad Adolfo Ibáñez

Rapporteur
Rapporteur
Examiner
Examiner
Thesis Adviser
Thesis Adviser

Date of defense :

Décember 14 2018

Bifurcations dans des systèmes avec bruit: Applications aux Sciences Sociales et à la Physique

Rapporteurs

Enrique Tirapegui, Profesor, Universidad de Chile

Giorgio Sonnino, H.D.R., Université Libre de Bruxelles

Examineurs

Aldo Mascareño, Profesor, Universidad Adolfo Ibañez

Thomas Frisch, Professeur, Université Côte d'Azur

Directeurs de Thèse

Pierre Coullet, Professeur, Université Côte d'Azur

Sergio Rica, Profesor, Universidad Adolfo Ibañez

Titre

Bifurcations dans des systèmes avec bruit: Applications aux Sciences Sociales et à la Physique

Résumé

La théorie des bifurcations est utilisée pour étudier certains aspects des systèmes dynamiques qui intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système. Ces phénomènes ont lieu dans les systèmes physiques, chimiques, biologiques, écologiques, économiques et sociaux. Cette idée unificatrice a été appliquée pour modéliser et explorer à la fois tant les systèmes sociaux que les systèmes physiques.

Dans la première partie de cette thèse, nous appliquons les outils de la physique statistique et de la théorie des bifurcations pour modéliser le problème des décisions binaires dans les sciences sociales. Nous avons mis au point un schéma permettant de prédire l'apparition de sauts extrêmes dans ces systèmes en se basant sur la notion de précurseurs, utilisés comme signal d'alerte d'apparition de ces événements catastrophiques. Nous avons également résolu un modèle mathématique d'effondrement social fondé sur une équation de "régression logistique" utilisée pour décrire la croissance d'une population et la façon dont celle-ci peut être influencée par des ressources limitées. Ce modèle présente des bifurcations sous-critiques et nous avons étudié sa relation avec le phénomène social du « sunk-cost effect » (effet de coût irrécupérable). Ce dernier phénomène explique l'influence des investissements passés sur les décisions présentes, et la combinaison de ces deux phénomènes est utilisé comme modèle pour expliquer la désintégration de certaines sociétés anciennes (basés sur des témoignages archéologiques).

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions les systèmes macroscopiques décrits par des équations différentielles stochastiques multidimensionnelles ou, de manière équivalente, par les équations multidimensionnelles de Fokker-Planck.

Afin de calculer la fonction de distribution de probabilité (PDF), nous avons introduit un nouveau schéma alternatif de calcul basé sur les intégrales de chemin (« *Path Integral* ») lié aux processus stochastiques. Les calculs basés sur les intégrales de chemin sont effectués sur des systèmes uni et bidimensionnels et successivement comparés avec certains modèles dont on connaît la solution pour confirmer la validité de notre méthode. Nous avons également étendu ce schéma pour estimer le temps d'activation moyen (« *Mean Exit Time* »), ce qui a donné lieu à une nouvelle expression de calcul pour les systèmes à dimension arbitraire.

A` noter que pour le cas des systèmes dynamiques à deux dimensions, les calculs de la fonction de distribution de probabilité ainsi que du temps de sortie moyen ont validé le schéma des intégrales du chemin. Ça vaut la peine de souligner que la perspective de poursuivre cette ligne de recherche repose sur le fait que cette méthode est valable pour les « *non gradient systems* » assujettis à des bruits d'intensité arbitraires. Cela ouvre la possibilité d'analyser des situations plus complexes où, à l'heure actuelle, il n'existe aucune méthode permettant de calculer les PDFs et/ou les METs.

Mots clés:

physique non linéaire, méthode intégrale de chemin, processus stochastique transitions induites par le bruit, temps de sortie moyen

Title

Bifurcations and Noisy Systems: Social and Physical Applications

Abstract

Bifurcations in continuous dynamical systems, i.e., those described by ordinary differential equations, are found in a multitude of models such as those used to study phenomena related to physical, chemical, biological, ecological, economic and social systems. Using this concept as a unifying idea, in this thesis, we apply it to model and explore both Social as well as Physical systems.

In the first part of this thesis we apply tools of statistical physics and bifurcation theory to model a problem of binary decision in Social Sciences. We find an scheme to predict the appearance of extreme jumps in these systems based on the notion of precursors which act as a kind of warning signal for the upcoming appearance of these catastrophic events. We also solve a mathematical model of social collapse based on a logistic re-growing equation used to model population grow and how limited resources change grow patterns. This model exhibits subcritical bifurcations and its relation to the social phenomenon of sunk-cost effect is studied. This last phenomenon explains how past investments affect current decisions and the combination of both phenomena is used as a model to explain the disintegration of some ancient societies, based on evidence from archeological records.

In the second part of this thesis, we study macroscopic systems described by

multidimensional stochastic differential equations or equivalently by their deterministic counterpart, the multidimensional Fokker-Planck equation. A new and alternative scheme of computation based on Path Integrals, related to stochastic processes is introduced in order to calculate the Probability Distribution Function. The computations based on this Path Integral scheme are performed on systems in one and two dimensions and contrasted to some soluble models completely validating this method. We also extended this scheme to the case of computation of Mean Exit Time, finding a new expression for each computation in systems in arbitrary dimensions.

It is worth noting that in case of two-dimensional dynamical systems, the computations of both the probability distribution function as well as of the mean exit time validated the Path Integral scheme and the perspective for continuing this line of work are based on the fact that this method is valid for both arbitrary non gradient systems and noise intensities. This opens the possibility to explore new cases, for which no methods are known to obtain them.

Keywords:

Nonlinear Physics, Path Integral method, Stochastic Process, Transitions induced by noise, Mean first passage time

Acknowledgements

I would like to thank my two advisers, Professor Sergio Rica at UAI and Professor Pierre Couillet at UCA for their support, interest and help during this Doctorate. I appreciate their permanent attitude and availability to teach me, discuss and clarify concepts and ideas, to solve problems in a proper way and specially the freedom that both always gave me for pursuing this research. This thesis benefited in a fundamental way with the expertise, enthusiasm and encouragement of Professor Enrique Tirapegui and his deep knowledge on the Path Integral methods and Stochastic Processes.

I also want to thank Núcleo Milenio, Modelos de Crisis NS130017k (Chile) and its past Director Professor Aldo Mascareño, for financial support through a Doctoral Scholarship during the first three years of this Doctorate and for his interest in the applied social models studied in this thesis.

The French Embassy through Campus France gave me support through a mobility scholarship for a couple of three-month stays at the INPHYNI in Nice, France and I want to acknowledge Maria Ines Stüven who managed all the process involved in this scholarship.

Also I want to give special thanks to Virginia Pantoja at UAI for all her help and professionalism which carried out the administrative process of this Co-tutelle to a successful end and to Elizabeth Taffin de Givenchi, head of the Doctoral School at UCA, for her interest, permanent help and kindness, which allowed me to surf smoothly through all the administrative stages required by the Physics Program, specially during my stays in Nice.

A special thanks go to all the administrative staff of the DISC at UAI for her permanent disposition to help us, students of this Doctoral Program.

Finally I would like to thank professors Thomas Frisch, Aldo Mascareño, Giorgio Sonnino and Enrique Tirapegui for accepting to participate as members of the Ph.D. Thesis Committee.

”So much to do and so little time”

Jack Nicholson as *the Joker*

Batman (1989)

Contents

I	Modelling Crises in Social Systems	1
1	Introduction	2
2	The concept of Bifurcation	4
2.1	Bifurcations in one dimension	5
2.2	Bifurcations in two dimensions	9
3	The Random Choice Model (RCM) and Pomeau et al Scheme for foretelling Catastrophes	11
3.1	The Random Choice Model	11
3.2	Model Setup	12
3.3	Decision Rules	13
3.4	Simulations of RCM	14
3.5	Pomeau et al Scheme for foretelling Catastrophes	17
3.6	Scheme description	17
3.7	Results	22
4	Bifurcations, Sunk-Costs Effect and a Model of Social Collapse	25
4.1	Introduction	25
4.2	Model	26
4.2.1	Slow Responses and Sunk-Cost Effects	26
4.2.2	Model of Social Collapse	26
4.3	Results	27
II	Bifurcations and Noise	31
5	Introduction	32
6	Mathematical Preliminaries	34
6.1	Stochastic Differential Equations (SDE)	34
6.1.1	Motivation	34
6.1.2	SDE's in arbitrary dimensions	35
6.2	Fokker-Planck Dynamics	35
6.3	Path Integrals	38

7	General Schemes for the computation of the Probability Distribution Function	40
7.1	SDE approach	40
7.2	The Nonequilibrium Potential and the Stationary Probability Distribution Function for the Fokker-Planck Equation	42
7.2.1	One-dimensional systems	42
7.2.2	Multi-dimensional systems	42
7.3	Solution by Path Integral Formalism and Probability Transition Matrix	43
7.4	The time dependent case	44
8	The Mean Exit Time	45
8.1	The concept of Mean Exit Time	45
8.2	Path Integral Solution for MET	47
8.3	Time-dependent heuristic computation for a quasi-static case	47
9	Results for PDF and MET	49
9.1	Probability Distribution Function (PDF)	49
9.1.1	PDF in case of a time-independent bifurcation	51
9.1.2	PDF in case of a time-dependent bifurcation	52
9.2	Mean Exit Time (MET)	53
9.2.1	MET in case of a time-independent bifurcation	54
9.2.2	MET in case of a time-dependent bifurcation	55
10	Dynamical Systems in Two Dimensions	56
10.1	Soluble Models	57
10.1.1	General Hopf Bifurcation	57
10.1.2	A two-dimensional bistable model of co-dimension 2	58
10.2	Solution by Path Integral	60
10.2.1	PDF	60
10.2.2	Mean exit time	60
10.3	Results	62
10.3.1	The General Hopf Bifurcation	62
10.3.2	The Bistable co-dimension two Model	63
10.3.3	The Mean Exit Time for the Bistable model	64
III	Conclusions	65
11	Conclusions and Perspectives	66
IV	Appendix	68
A	Calculation of the normalized rms spectral moment	69
B	Details on Numerical Analysis of data for the Path Integral computation of Mean Exit Time for the Bistable Model	71

